Basisauswahl- und Ergänzungssatz

Sei V VR,

$\mathcal{E} := (\underline{v}_i)_{i \in E}$ Erzeugendensystem, darin
$\mathcal{U} := (\underline{v}_i)_{i \in U}$ linear unabhängig,
$U \subset E$.

Dann können wir Vektoren aus $\mathcal{E}$ auswählen, die $\mathcal{U}$ zu einer Basis ergänzen.

Hauptsatz der linearen Algebra, Teil I: Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Dimensionssatz (2.5.5)

Je zwei Basen $(\underline{v}_i)_{i \in B}$, $(\underline{w}_i)_{i \in B'}$ eines VR haben dieselbe Länge

d.h. $\exists$ Bijektion $B \cong B'$.

Def (2.5.5):

Die <u>Dimension</u> $\dim_K(V)$ eines K-VRs V ist die Länge einer Basis.

Notiz

- dim wohldefiniert nach Hauptsatz und Dimensionssatz

- V endlich erzeugt $\iff \dim_K(V)$ endlich „V endlich-dimensional" nach Auswahl- und Ergänzungssatz.

Austauschsatz (2.5.4) V VR

$\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d)$ Basis

$\mathcal{U} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_\ell)$ linear unabhängig

Dann ist $\ell \leq d$, und es gibt

$\underline{b}_{i_1}, \dots, \underline{b}_{i_\ell}$ in $\mathcal{B}$

derart, dass man durch Austausch

von $\underline{b}_{i_j}$ gegen $\underline{v}_j$ (für $j = 1, \dots, \ell$)

eine neue Basis erhält.

<u>Korollar</u> (2.5.5)

Jeder UVR W eines endlich-erzeugten VRs V ist endlich-erzeugt. Ferner gilt:

$$\dim W \leq \dim V, \quad \text{und}$$
$$\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V.$$

endlich-erzeugt wichtig

<u>Dimensionsformel für Summen</u> (2.6.1)

Für endlich-dimensionale UVR $W_1, W_2 \subset V$ gilt:

$$\underbrace{\dim(W_1 + W_2)}_{\ell+m+n} = \underbrace{\dim W_1}_{\ell+m} + \underbrace{\dim W_2}_{\ell+n} - \underbrace{\dim(W_1 \cap W_2)}_{\ell}$$

Wie findet man eine Basis zu $W \subset K^n$?

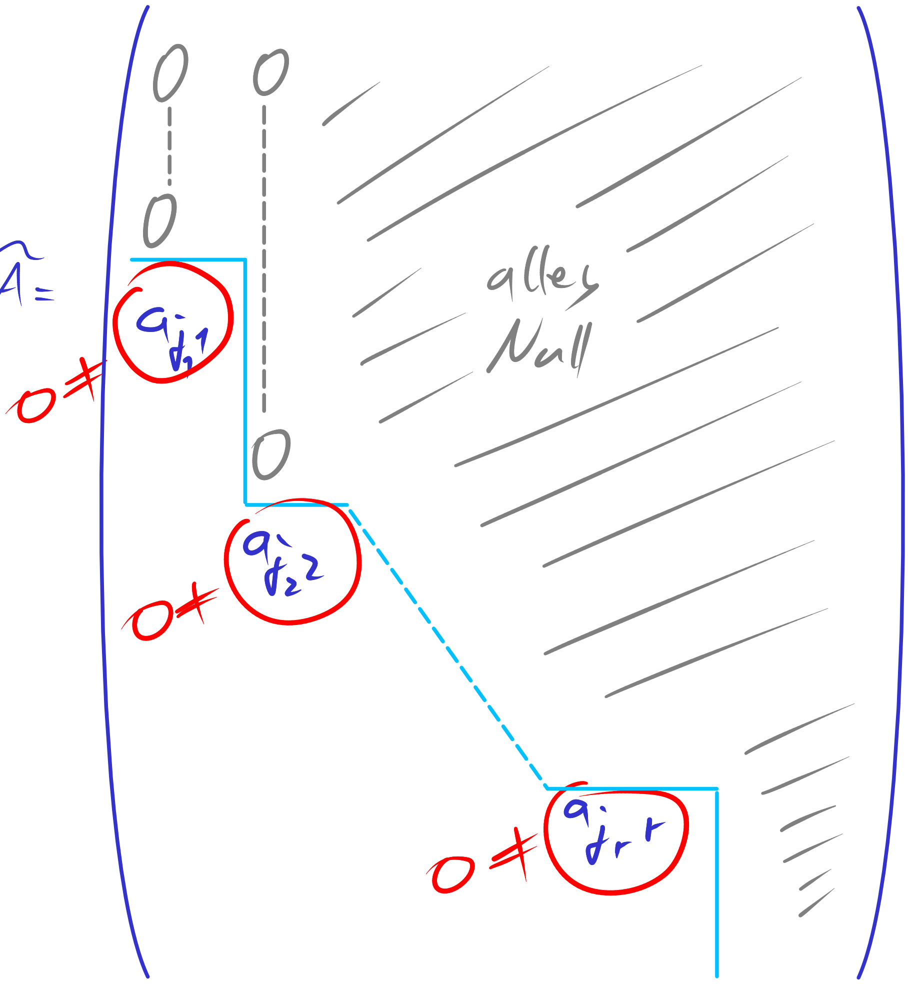
z.B.: $W = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right\}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$

<u>Satz (2.5.7)</u> (Basenfindung)

Sei $W = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) \subseteq K^d$.

Schreibe die Erzeuger v_i als Spalten und fasse sie zu einer Matrix A zusammen. Bringe A durch elementare Spaltenumformungen auf **Spaltenstufenform**:

$\hat{A} =$



Dann sind die Spalten von $\hat{A}$, die nicht $\underline{0}$ sind, eine Basis von W.

Satz: Jede Matrix lässt sich durch $E^{Z}_{S}U$ auf Zeilen/Spalten stufenform bringen.

Satz (2.5.7)

A Matrix mit Spalten/Zeilen $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$

$\hat{A}$ " " " /Zeilen $\hat{\underline{a}}_1, \ldots, \hat{\underline{a}}_n$.

Geht $\hat{A}$ aus A durch ESU/EZU hervor, so ist

$$\operatorname{span}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \operatorname{span}(\hat{\underline{a}}_1, \ldots, \hat{\underline{a}}_n).$$